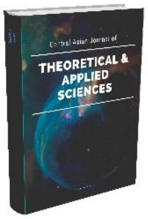

CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL AND APPLIED SCIENCES

Volume: 02 Issue: 04 | April 2021 **ISSN:** 2660-5317

Об Одной Краевой Задаче Для Уровнениясоставного Типа Третьего Порядка

Муминов Ф.М.[1]
Миратоев З.М.[2]
Утабов У.А.[3]
[1,2,3]*Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета Алмалык. Узбекистан*

Received 10th March 2021, Accepted 27th March 2021, Online 8th April 2021

Abstract*- В данной статье проводится анализ одной краевой задачи для комбинированного типа уровня третьего порядка. В данном случае были выявлены исследования различных особенностей аналитических взглядов с методологической точки зрения. По различным характеристикам исследования были завершены с указанием результатов и недостатков в целом.*

***Key words* :** *краевой задачи, комбинированного типа, уровня третьего порядка,*

INTRODUCTION

Пусть Ω- ограниченная односвязная область в n-мерном евклидовым пространстве R^n Предположим для простоты что $(n-1)$-мерная граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу C^∞, т.е в достаточно малой окрестности каждой точки $x^0=\left(x_1^0, x_2^0 \ldots x_n^0\right)\in\partial\Omega$ существует параметрическое представление поверхности

$$\partial\Omega : x_j = f\left(x_1 x_2 \ldots . x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_n\right)$$

$$1\le j \le n$$

Такие, что функция *f(x)*бесконечно дифференцируема в этом окрестности

Положим

$$D=(0,1)\times\Omega, \quad S=\partial\Omega\times[0,1]$$

В цилиндрической области DCR^{n+1} рассмотрим дифференциальное уравнения третьего порядка

$$Lu \equiv -\frac{\partial\Delta u}{\partial t} + K(x,t)U_{tt} + \sum_{i=1}^{n} U_{x_i x_1} + \alpha(x,t)U_t + \beta(x,t)U + \gamma(t)|U|^{\rho}U = f(x,t) \tag{1}$$

где $\Delta U = U_{tt} + \sum_{i=1}^{n} U_{x_i x_1}$.

Отметим, что уравнения вида (1) относятся к классу уравнений составного типа $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[6]$, $[8]$ Исследование краевых задач для уравнений составного типа представляет большой интерес, собственно в многомерном случае $[4]$.

Всюду ниже будем предполагает, что

$$K(x,t)\in C(\overline{D})\cap C'(D), \alpha(x,t)\in C(\overline{D})$$

$$\beta(x,t)\in C(\overline{D})\cap C'(D),\ o\le\gamma(t)\in C'[0,1]$$

$$-1<\rho<\frac{2}{n-1}, \text{при } n\ge 3$$

($\rho>-1$, произвольно и конечно при n=1,2)

Обозначим через $\nu=(\nu_1\nu_2.......\nu_n)$ вектор внутренний нормали к S.

Смешанная задача 1. Найти решения уравнения (1). В области Dи такое,что

$$\left.\begin{matrix} U|_{t=0}=0, & U(x,t)|_{t=1}=0 \\ U_{tt}(x,t)|_{t=0}=0, & U(x,t)|_{S}=0 \end{matrix}\right\}(2)$$

Обозначим через C_L класс функций из пространства

$$H=\left\{U:U\in W_2^2(D); \frac{\partial\Delta U}{\partial t}\in L_2(D), U_t\in L'_p(D)\right\}$$

удовлетворяющих условиям (2). В пространстве L'_ρ, $\rho=S+2$ нормаопределяется следующем образом

$$\|U\|^P_{L'_P(D)}=\int_D f(t)|U|^\rho\,dxdt$$

Определения. Назовем функцию $U(x,t)$ регулярным решениям задачи (1)-(2), если

$$U(x,t)\in C_L$$

$$|U|^\rho U\in L_2(D);\ \frac{\partial}{\partial t}\left(|U|^{\rho/2}U\right)\in L'_2(D),\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|U|^{\rho/2}U\right)\in L_2^\gamma(D),$$

и $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в области D.

Теорема. Пусть выполнены выше указанные условия для коэффициентов уравнения (1). Пусть кроме того всюду в области D выполнены условия

$$2\alpha(x,t)-\lambda K-K_t-\lambda^2\ge\delta>0$$

$$-\lambda\beta-\beta_t\ge\delta_1>0,\ K(x,0)+\lambda\le 0,\qquad \beta(x,0\le 0)$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой что $f\in L_2(D)$ существует единственный регулярное решении задачи 1.

Докажем справедливость следующих оценок:

$$\|U_{tt}\|^2_{L_2(D)}+\|\Delta U_t\|^2_0+\|U\|^2_{W_2'(D)}+\|U_t\|^\rho_{L_\rho(D)}\le m\|f\|^2_0 \tag{3}$$

$$\left\|\frac{\partial\Delta U}{\partial t}\right\|^2_0+\sum_{i=1}^n\left\|U_{x_ix_i}\right\|^2_0+\frac{\rho+1}{(0{,}5\rho+1)}\left[\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(|U|^{\rho/2}U\right)\right\|^2_{L'_P(D)}+\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|U|^{\rho/2}U\right)\right\|^2_{L'_P(D)}\right]\le m_2\|f\|^2_0 \tag{4}$$

Для этого воспользуемся методам Галеркина $(см[5])$, с выбором специального базиса

Пусть $\varphi_n(xt)$собственные функции краевой задачи

$$\Delta\varphi_n(x,t) = -\mu_n^2\varphi_n(x,t) \qquad (5)$$

$$\left.\begin{matrix} \varphi_n(x,t)\big|_{t=1} & \left(\varphi_{n_t} - \lambda\varphi_n\right)\big|_{t=0} \\ \varphi_n(x,t)\big|_S = 0 & \end{matrix}\right\}(6)$$

где $n = 0,1,2,.....$

$$U^V(x,t) = \sum_{i=1}^{N} C_n W_n(x,t) \qquad (7)$$

где C_n определяются из системы нелинейно алгебраических уравнений вида

$\left(LU^N, \varphi_S\right)_0 = \left(f, \varphi_S\right)_0, \qquad S = 1,2,......N$ (8)

Разрешимость этой системы следует из полученных ниже оприорных оценок приближенных решений из леммы и «об остром угле» [6]. Умножая (8) на $2C_S$ суммируя по Sот 1 доN получим тождество

$$\left(LU^V, e^{\lambda t}U_t^V\right)_0 = \left(f, e^{\lambda t}U_t\right)_0 \qquad (9)$$

Применяя к (9) формуле Грина и неравенство Коши

$$2|a||b| \le \gamma|a|^2 + \frac{1}{\gamma}|b|^2, \ \forall\gamma > 0$$

Получим

$$\left\|U_{tt}^N\right\|_0^2 + \left\|\nabla U_t^N\right\|_0^2 + \left\|U_t\right\|_{L_\rho(D)}^P + \left\|U\right\|_{W_2^1(D)}^2 \le m_3\|f\|_0^2$$

Вернемся к вопросу о разрешимости системы уравнений (9). Если записать ее в виде $P_N(\vec{C}) = 0$, где

$$\vec{C} = \exp(\lambda t)(c_1, c_2, c_3, ..., c_n)$$

то справедлива оценка

$$\left(P_n(\vec{C}), \vec{C}\right)_0 \ge m_0\left\|U^V\right\|_{W_2'(D)} - m_4$$

где m_0 и m_4 некоторые положительные постоянные. В силу того, что линейная оболочка $\Phi\{W_1, W_2, ...W_n\}$ есть конечномерное пространство, то существует $R_1(N) > 0$такое, что

$$\left\|U^N\right\|_{W_2'(D)}^2 \ge R_1(N)\sum_{K=1}^{N}\left(C_K\right)^2$$

Значит выполнено неравенство

$$\left(P_N\left(\vec{C}\right),\vec{C}\right)_0 \geq R_1(N)\left|\vec{C}\right|^2 - m_4 \geq 0$$

Если $\left|\vec{C}\right|$ достаточно большая величина, а это есть условия «острого угля» достаточное для разрешимости системы уравнений(10). Для того чтобы последовательность решений $\left\{U^V\right\}$ было ограничена в $H(D)$ необходимо оценить производную $\dfrac{\partial \Delta U}{\partial t}$ и $U_{x_I x_I}$. С этом целью благодаря (5)-(7)мы можем заменить φ_N в (10) на $-\dfrac{1}{\mu_n^2}\Delta\varphi_n$. Умножая в (10) на C_n и суммируя по n от 1 до N находим

$$\left(Lu^V, \frac{-2}{\mu_n^2}\ell^{\lambda t}\left[\frac{\partial \Delta U^V}{\partial t} + 2\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^V\right]\right)_0 = -\frac{2}{\mu_n^2}\left(f, e^{\lambda t}\left[\frac{\partial \Delta U^V}{\partial t} + 2\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^V\right]\right)_0 \qquad (11)$$

Применяя формулу Грина, получим

$$\int_D e^{\lambda t}\left\{\left(\frac{\partial \Delta U^N}{\partial t}\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial^2 U^V}{\partial x_i^2}\right)^2 - \sum_{i=1}^N U_{x_i x_i}^V U_{tt}^N + \frac{\partial \Delta U^V}{\partial t}\right\} + \left[(2\lambda - K(x,t))U_{tt}^N + \left(\lambda^2 + \alpha(x,t)\right)U_t^V + \beta(x,t)U^N\right] -$$

$$-\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 U^2}{\partial x_i^2}\left[\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^N\right] + \left[2\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^N\right]\left[-K(x,t)U_{tt}^N - \alpha(x,t)U_t^N - \beta(x,t)U^N\right]\Big\}dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_S e^{\lambda t}\left[U_{x_i}^N V_t + \gamma(t)\left|U_t^N\right|^{S+1}U_{tt}^N V_t + \gamma(t)|U|^{\rho+2}U_{x_i}V_{x_i}\right]dS + \int_D e^{\lambda t}\left[\gamma(t)e^{\lambda t}\left|U^N\right|U_{tt}^N dxdt +\right.$$

$$+2\int_D \lambda e^{\lambda t}\left|U_t^N\right|U_{tt}^N - \lambda^2\int_D e^{\lambda t}\left|U_t^N\right|^{S+2}dD + \int_D e^{\lambda t}\gamma(t)(S+1)\left[\left|U_t^N\right|^S U_{tt}^N + \left|U^N\right|^S U_{x_i}^N\right]dxdt = \sum_{K=1}^6 I_K \qquad (12)$$

(I_1-интеграл по области, I_2–интеграл по границе, I_3, I_4, I_5, I_6-интегралы по области с нелинейными членами). Из оценки (3) применяя неравенство Коши в I_1 получим, что интеграл I_1, допускает оценку

$$I_1 \geq m_6\int_D\left[\left(\frac{\partial \Delta U}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 U^N}{\partial x_i^2}\right)^2\right]dD \qquad (13)$$

Учитывая условие (2) получим

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{\partial^2 U^N(x,0)}{\partial x_i^2}\right]^2 dx \geq 0$$

Члены из (12) не являющимся билинейными, можно переписать в виде

$$I_6 = \frac{2(\rho+1)}{0{,}5\rho+1}\int_D e^{\lambda t}\gamma(t)\left[\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|U^N\right|^{\frac{\rho}{2}}U^N\right)^2\right\} + \sum_{i=1}^n\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|U^N\right|^{\frac{\rho}{2}}U^N\right)\right\}^2\right]dxdt \; (14)$$

Из представления (14) видно, что $I_6 > 0$ Нам осталось оценить интегралы $I_3 + I_4$. т.е.

$$I_3 + I_4 = \int_D e^{\lambda t}\left[\gamma(t)e^{\lambda t}\right]U_t^N\left|{}^{\rho+1}\cdot U_{tt}^N dxdt + 2\int_D \lambda e^{\lambda t}\gamma(t)\right|U^N\left|{}^{\rho+1}U_{tt}^N dxdt = \int_D e^{\lambda t}\left(\gamma_t(t) - \lambda\gamma(t)\right)\right|U^N\left|U_{tt}^N dxdt\right.$$

В силу неравенства Гёлдера, имеем

$$I_3 + I_4 \geq -\max\left|\gamma_t(t) - \lambda t\right| \cdot \left\|U^N\right\|_{L_\rho(D)}^{\rho}\left\|U^N\right\|_{L_q(D)}^{'}\left\|U_{tt}^N\right\|_0$$

где q (как и в теореме вложения Соболева) определяется из равенства

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1.$$

Поскольку, согласно $S \leq \dfrac{2}{n-2}$, следует $S \leq q$ то в силу (13) имеем

$$\left\|U_t^N\right\|_{L_\rho} \leq const\left(\|f\|_0\right)$$

Итак

$$I_3 + I_4 \geq -const\left(\|f\|_0\right)\max\left|\gamma_t + \lambda\gamma\right|\left\|U_t^V\right\|_{U_q}\left\|U_{tt}^V\right\|_0 \quad (15)$$

При выполнении условии теоремы на параметр S (15) имеем вложение $W_2'(D) \subset L_q(D)$

Положим $const\left(\|f\|_0\right)\max\left|V_t - \lambda\gamma(t)\right| < \delta_3$ и применяя неравенства Коши к (15) получим

$$I_3 + I_4 \geq -\frac{\delta_3}{2}\left\|U_{tt}^N\right\|_0^2 - \frac{\delta_3}{2}\left\|U_t^N\right\|_{W_2'(D)}^2 \quad (16)$$

Следовательно вытекает вторая оценка. Итак мы получили необходимые априорные оценки для приближенного решения задача (1)-(2). Поскольку все производные, входящие в уравнение (1) квадратично суммируемы по области D, то по известной теореме о слабой компактности следует, что из ограниченной последовательности функций $\{U^N\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследоватальность функции $\{U^{N_i}\}$ такую, что при $N_i \to \infty$ имеем

U^{N_i} слабо в $W_2^2(D)$(17)

$\left\|U^{N_i}\right\|U^{N_i} \to \psi$ слабо в $L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}$ (18)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left\|U^{N_i}\right\|^{\frac{\rho}{2}}U^{N_i}\right) \to \psi_1 \text{ слабо в } L_2(D) (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left\|U^{N_i}\right\|U^{N_i}\right) \to \psi_2 \text{ слабо в } L_2(D) \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Delta U^{N_i}}{\partial t} \to \frac{\partial \Delta U}{\partial t} \text{ слабо в } L_2(D) \quad (21)$$

Согласно лемме 1.3 из [6] предельном переходе в нелинейном члене иммем

$$\psi = |U|^{\frac{\rho}{2}} U\,;\ \psi_1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(|U|^{\frac{\rho}{2}} U\right);\ \psi_2 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|U|^{\frac{\rho}{2}} U\right).$$

Теперь мы можем осуществить предельный переход в тождестве (12) при $N_i \to \infty$. Тем самым существование регулярного решения задачи (1)-(2) доказана.

Для доказательства единственности полученного решения рассмотрим разность двух возможных решении $V(x,t) = U_1 - U_2$ где U_1 и U_2 два решения задачи, тогда $V(x,t)$ удовлетворяет уравнение

$$LV = -\frac{\partial \Delta V}{\partial t} + K(x,t)V_{tt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \gamma V_t + \beta V + [\gamma(t)|U_1|U_1 - \gamma(t)|U_2|U_2] \equiv 0 \quad (22)$$

с краевыми условиями (2). Непосредственно из оценки (3) следует что

$$\|V_{tt}\|_0^2 + \|\nabla V_t\|_0^2 + \|V\|_{W_2^{\prime}(D)}^2 + \int_D e^{\lambda t}\left[|u_1|^{\rho} u_1 - |u_2|^{\rho} u_2\right](u_1 - u_2)dD \le 0 \qquad (23)$$

Учитовая монотонность оператора $|u|^{\rho} u$, получим $\int_D e^{\lambda t}\left[|u_1|^{\rho} u_1 - |u_2|^{\rho} u_2\right](u_1 - u_2)dxdt \ge 0$.

Тогда из (23) следует, что $\|V_{tt}\|_0^2 + \|\nabla V_t\|_0^2 + \|V\|_{W_2^{\prime}(D)}^2 \le 0$ и значит $V(x,t) = 0$. т.е. $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в D. Тот факт завершает доказательство теоремы.

Литература:

1. Врагов В.Н. Краевые задачи неклассических уравнений математической физики. Новосибирск. НГУ. 1983 г. 84 с.
2. Врагов В.Н. Об одном уравнении смещанного-составного типа. //Дифференциальная уравнения. 1973. –т.д. №1 –с 169-171.
3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного составного типа. Ташкент. Фан. 1979. с 238.
4. Кожанов А.И. Краевая задача для одного класса уравнений третього порядка. Докл. АН. СССР. 1979-Т. 249. №3 с 536-540.
5. Лодыжеская О.А. Краевые задача математической физики. –М. Наука. 1973.
6. Лионе Ж.Л. некоторые методы решения нелинейных краевых задач. –М. Мир. 1972.
7. Салохитдинов М.С. Уравнения смешанного составного типа. Ташкент. Фан. 1974.
8. Муминов Ф.М. О нелокальные краевых задачах для уравнений смешанного типа второго рода. Ташкент. Фан ва технология. 2011.

